SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Davide Guidetti

SCHEMI ALLE DIFFERENZE FINITE E REGOLARITÀ MASSIMALE PER EQUAZIONI PARABOLICHE IN SPAZI DI FUNZIONI HÖLDERIANE

22 maggio 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Sono esposte alcune versioni per equazioni alle differenze finite di risultati di regolarità massimale per problemi parabolici in spazi di funzioni hölderiane. Vengono considerati gli schemi di Eulero e di Crank-Nicolson. Infine viene ottenuto un teorema di convergenza.

Summary. Some finite difference analogs of results of optimal regularity for linear parabolic boundary value problems in spaces of Hölder continuous functions are given; the backward Euler scheme and the Crank-Nicolson scheme are examined.
We conclude with a result of convergence.

Scopo di questo seminario é presentare alcune versioni per equazioni alle differenze finite di risultati di regolaritá massimale valevoli per problemi misti di tipo parabolico, ottenuti all'autore in collaborazione con S. Piskarev dell'Universitá di Stato di Mosca. A mia conoscenza la letteratura in proposito non é molto vasta. Potremmo dire che praticamente quasi tutto ció che esiste giá sull'argomento é opera della scuola di Sobolevskii a Voronezh. Segnalo a questo proposito la monografia [1], che contiene essenzialmente applicazioni al solo caso di problemi su tutto $\mathbf{R}^n$ e tratta la discretizzazione di problemi in cui la parte ellittica dell'operatore parabolico genera un semigruppo analitico nello spazio di base. É ben noto che ció non accade per il problema di Dirichlet se si lavora in spazi di funzioni hölderiane ed é proprio questo caso che vorrei trattare. Mi limiteró a considerare il piú semplice problema parabolico possibile, anche se molto di ció che diró potrebbe essere largamente generalizzato. Per questo faccio riferimento al preprint [2]. Premetteró ai risultati a cui accennavo una breve introduzione al metodo delle differenze finite nell'ambito delle equazioni paraboliche.
Considereró dunque solo il seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x), \\ 0 \le t \le T, 0 \le x \le L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le L. \end{cases} \tag{1}$$

con T e L numeri reali positivi.
Siano M e N interi positivi; poniamo $\tau := \frac{T}{M}, h := \frac{L}{N}$. Per $n \in \{0,...,M-1\}, j \in \{0,...,N\}$, una approssimazione di $\frac{\partial u}{\partial t}(n\tau, jh)$ é, ad esempio,

$$\frac{u((n+1)\tau, jh) - u(n\tau, jh)}{\tau},$$

una approssimazione di $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(n\tau, jh)$ per $n \in \{0,...,M\}, j \in \{1,...,N-1\}$,é, ad esempio,

$$\frac{u(n\tau,(j+1)h) - 2u(n\tau,jh) + u(n\tau,(j-1)h)}{h^2}.$$

Poniamo ora, per $0 \le n \le M-1, 1 \le j \le N-1$,

$$F_j^n := f(n\tau, jh).$$

In base alle considerazioni precedenti, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + F_j^n, \text{ per } 0 \le n \le M-1, 1 \le j \le n-1, \\ U_0^n = U_N^n = 0 \text{ per } 1 \le n \le M, \\ U_j^0 = 0 \text{ per } 0 \le j \le N. \end{cases} \tag{2}$$

Introduciamo ora le seguenti notazioni: sia $\mathcal{I}$ un insieme ed E uno spazio di Banach con norma $||.||$; indichiamo con $B(\mathcal{I}, E)$ l'insieme delle applicazioni da $\mathcal{I}$ a E

limitate. Omettiamo di indicare E se $E = \mathbf{C}$. Se $F \in B(\mathcal{I}, E)$ e $j \in \mathcal{I}$ scriviamo F_j o F^j invece di $F(j)$. Infine, se $G \in B(\mathcal{I}, E)$ poniamo

$$||G||_{B(\mathcal{I},E)} := \sup_{j\in\mathcal{I}} ||G_j||.$$

Allora, evidentemente, U^n é un elemento di $B(\mathcal{I}_N)$, con $\mathcal{I}_N := \{1, ..., N-1\}$. Per $V \in B(\mathcal{I}_N)$, $j \in \{1, ..., N-1\}$, poniamo

$$A_h V_j := \frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{h^2}, \tag{3}$$

con la convenzione che $V_j = 0$ se $j \in \{0, N\}$. Possiamo allora riscrivere (2) nella forma

$$\begin{cases} \frac{U^{n+1}-U^n}{\tau} = A_h U^n + F^n, n = 0, ..., M-1, \\ U^0 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

che puó essere evidentemente risolto ricorsivamente.
Ora, una proprietá fondamentale che deve essere posseduta da uno schema di discretizzazione é la stabilitá: nel caso in questione, questa proprietá puó essere formulata nel seguente modo: esiste $C > 0$ indipendente da τ e h tale che per ogni $F = (F^0, ..., F^{M-1})$

$$\max_{0\le n\le M} ||U^n||_{B(\mathcal{I}_N)} \le C \max_{0\le n\le M-1} ||F^n||_{B(\mathcal{I}_N)}. \tag{5}$$

É ben noto che lo schema (3) non é incondizionatamente stabile, nel senso che la stabilitá viene a cadere se non si presuppone qualche relazione tra τ e h. Una relazione che garantisce la stabilitá é la maggiorazione

$$\tau \le \frac{1}{2}h^2. \tag{6}$$

Per questo e altri risultati di tale genere, si veda il lungo articolo [3].
Naturalmente, (4) (detto schema di Eulero esplicito) non é l'unico schema di discretizzazione possibile per (1). Consideriamo il cosí detto "schema di Eulero implicito" o schema di Rothe:

$$\begin{cases} \frac{U^n-U^{n-1}}{\tau} = A_h U^n + F^n, n = 1, ..., M, \\ U^0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Osserviamo che il calcolo della soluzione di (7) é molto piú laborioso del calcolo della soluzione di (4), in quanto richiede l'inversione di una trasformazione lineare: si vede abbastanza facilmente che per ogni τ e h l'operatore lineare $1 - \tau A_h$ é invertibile in $B(\mathcal{I}_N)$ e per la soluzione si ha, dato $n \in \{1, ..., M\}$,

$$U^n = \tau \sum_{l=1}^{n} (1 - \tau A_h)^{l-n-1} F^l. \tag{8}$$

La maggiore difficoltá di calcolo della soluzione di (7) é tuttavia compensata dalla proprietá di stabilitá incondizionata dello schema.
Un altro schema interessante é il cosí detto schema di Crank-Nicolson, che é a metá strada tra i due schemi di Eulero:

$$\begin{cases} \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}(A_h U^n + A_h U^{n-1}) + F^n, n = 1, ..., M, \\ U^0 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

In questo caso la soluzione di (9) é data da

$$U^n = \tau(1 - \frac{\tau}{2}A_h)^{-1} \sum_{l=1}^{n} r(\tau A_h)^{n-l} F^l, \tag{10}$$

ove $r(z) = (1 + \frac{z}{2})(1 - \frac{z}{2})^{-1}$.
L'interesse dello schema (9) sta nel fatto che é piú accurato dei due precedenti nel seguente senso: sia u la soluzione di classe C^∞ su $[0,T] \times [0,L]$ di (1) (ovviamente supponiamo che (1) ammetta una soluzione con questa regolaritá). Poniamo, per $n \in \{0, ..., M\}, j \in \{0, ..., N\}$,

$$u_j^n := u(n\tau, jh) \tag{11.}$$

Allora, si ha, per lo schema (7),

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = A_h u^n + F^n + O(\tau + h^2), \tag{12}$$

ponendo $F_j^n = f(n\tau, jh)$. Invece, per lo schema (9),

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}A_h(u^n + u^{n-1}) + F^n + O(\tau^2 + h^2), \tag{13}$$

ove $F_j^n = f((n - \frac{1}{2})\tau, jh)$. Applicando la formula di Taylor, nel caso in cui si abbia stabilitá, la maggiore accuratezza di una schema garantisce, per piccoli valori di τ e h, una migliore approssimazione della soluzione di (1) mediante la soluzione dello schema alle differenze. É ben nota la stabilitá incondizionata dello schema (9). Rilevo comunque il fatto per un generico problema di evoluzione, la stabilitá dello schema di Crank-Nicolson é un problema difficile. Ricordo solo il seguente recente risultato, conseguenza quasi immediata di stime dovute a vari autori (vedi [4] e [5]):

Teorema 1. *Sia E uno spazio di Banach, A un operatore lineare in E non necessariamente limitato, con il risolvente contenente $\{z \in \mathbf{C} - \{0\} || Arg(z)| \leq \omega\}$, per qualche $\omega \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Valga inoltre, per z nel settore detto,*

$$||(z - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(E)} \leq M|z|^{-1}, \tag{14}$$

con $M > 0$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}(AU^n + AU^{n-1}) + F^n, n = 1, ..., M, \\ U^0 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

con $F^1, ..., F^n \in E$. *Allora, (15) é univocamente risolubile ed esiste* $C > 0$ *dipendente solo da* ω, M, T *tale che*

$$\max_{1\le n\le M} ||U^n||_E \le C \max_{1\le n\le M} ||F^n||_E. \tag{16}$$

E' chiaro che se si discretizza il problema anche nello spazio (come nel caso particolare che ci stiamo limitando a considerare), la validitá uniforme nel passo di discretizzazione spaziale delle ipotesi del teorema 1 implica la stabilitá.
Passiamo ora a stimare norme piú forti della soluzione U dello schema alle differenze; introduciamo a tale scopo un po' di notazioni.
Sia $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{Z}$ e sia $V \in B(\mathcal{I}, E)$ dove E é uno spazio di Banach. Sia poi $\theta \in]0,1[$. Poniamo

$$[V]_{C_h^\theta(\mathcal{I},E)} := \sup_{j,k\in\mathcal{I}, j<k} [(k-j)h]^{-\theta} ||V_k - V_j||, \tag{17}$$

$$||V||_{C_h^\theta(\mathcal{I},E)} := \max\{||V||_{B(\mathcal{I},E)}, [V]_{C_h^\theta(\mathcal{I},E)}\}. \tag{18}$$

Introduciamo ora la differenza divisa in avanti: poniamo $\mathcal{I}_1 := \{j \in \mathcal{I} | j+1 \in \mathcal{I}\}$ e, per $j \in \mathcal{I}_1$, $h > 0$, $V \in B(\mathcal{I}, E)$,

$$\partial_h V_j := \frac{V_{j+1} - V_j}{h}. \tag{19}$$

Piú in generale, sia per l intero positivo, $\mathcal{I}_l := \{j \in \mathcal{I} | j+1, ..., j+l \in \mathcal{I}\}$. Per $j \in \mathcal{I}_l$ é ben definita la differenza divisa di ordine l

$$\partial_h^l V_j := h^{-l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} U_{j+i}. \tag{20}$$

Per $V \in B(\mathcal{I}, E)$, m intero positivo, poniamo

$$||V||_{C_h^m(\mathcal{I},E)} := \max_{0\le l\le m} ||\partial_h^l V||_{B(\mathcal{I}_l,E)} \tag{21}$$

e, se m é un intero non negativo e $\theta \in]0,1[$,

$$||V||_{C_h^{m+\theta}(\mathcal{I},E)} := \max\{||V||_{C_h^m(\mathcal{I},E)}, [\partial_h^m V]_{C_h^\theta(\mathcal{I},E)}\}. \tag{22}$$

Vediamo ora un risultato di regolaritá massimale parabolico valevole per il problema (1); preliminarmente, definiamo soluzione stretta di (1) una funzione di dominio $[0,T] \times [0,L]$ continua assieme a $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Si ha allora:

Teorema 2. *Consideriamo il problema (1) e sia* $\theta \in]0,2[-\{1\}$; *le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché (1) possieda una soluzione stretta tale che* $t \to u(t,.) \in B([0,T]; C^{2+\theta}([0,L])), t \to \frac{\partial u}{\partial t}(t,.) \in B([0,T]; C^\theta([0,L]))$:
(a) $f \in C([0,T] \times \overline{\Omega})$;
(b) $t \to f(t,.) \in B([0,T]; C^\theta([0,L])$;
(c) $t \to f(t,0)$ *e* $t \to f(t,L)$ *appartengono a* $C^{\frac{\theta}{2}}([0,T])$;

(d) $f(0,0) = f(0,L) = 0$.

Vogliamo dare qualche versione del teorema 2 valevole per schemi alle differenze. Cominciamo dallo schema di Eulero implicito. Introduciamo alcune notazioni: per M intero non negativo poniamo $\overline{\mathcal{I}}_N := \{0,1,...,N-1,N\} = \mathcal{I}_N \cup \{0,N\}$. Se $V \in B(\mathcal{I}_N)$ indichiamo con $\tilde{V}$ l'elemento di $B(\overline{\mathcal{I}}_N$ così definito:

$$\tilde{V}_j = \begin{cases} V_j \text{ if } 1 \leq j \leq N-1, \\ 0 \text{ if } j \in \{0,N\}. \end{cases} \tag{23}$$

Useremo spesso la notazione $\mathcal{E}V$ in alternativa a $\tilde{V}$. Se $G \in B(\overline{\mathcal{I}}_N)$, indichiamo con RG la sua restrizione a $B(\mathcal{I}_N)$.
Il seguente risultato preliminare puó chiarire il significato delle ipotesi del risultato principale che seguirá:

Lemma 1. *Sia A_h l'operatore introdotto in (3) su $B(\mathcal{I}_N)$: per $V \in B(\mathcal{I}_N)$,*

$$A_h V_j = h^{-2}(\tilde{V}_{j-1} - 2\tilde{V}_j + \tilde{V}_{j+1}).$$

Allora:
a) esiste $\delta > 0$ indipendente da h tale che $\{z \in \mathbf{C} - \{0\} || Arg(\lambda)| < \pi\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C} || \lambda| \leq \delta\} \subseteq \rho(A_h)$;
b) per ogni $\phi \in [0,\pi[$ esiste $M(\phi) > 0$ dipendente solo da ϕ tale che, se $\lambda \neq 0$ e $|Arg(\lambda)| \leq \phi$ oppure $|\lambda| \leq \delta$

$$||(\lambda - A_h)^{-1}||_{\mathcal{L}(B(\mathcal{I}_N))} \leq M(\phi)(1+|\lambda|)^{-1}; \tag{24}$$

c) se $\theta \in]0,2[-\{1\}$, $|\phi| < \pi$, $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}, |Arg(\lambda)| \leq \phi$ o $|\lambda| \leq \delta$, per ogni $G \in B(\overline{\mathcal{I}}_N)$

$$|\lambda|||\mathcal{E}(\lambda - A_h)^{-1}RG||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}}_N)} + ||\mathcal{E}(\lambda - A_h)^{-1}RG||_{C_h^{2+\theta}(\overline{\mathcal{I}}_N)}$$

$$\leq c(\theta,\phi)[||G||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}}_N)} + |\lambda|^{\frac{\theta}{2}} \max\{|G_0|, |G_N|\}], \tag{25}$$

ove $c(\theta,\phi)$ dipende solo da θ e ϕ;
d) esistono due costanti positive $c_1(\theta)$ e $c_2(\theta)$ dipendenti solo da θ tali che per ogni $F \in B(\mathcal{I}_N)$

$$c_1(\theta)||F||_{(B(\mathcal{I}_N),D(A_h))_{\frac{\theta}{2},\infty}} \leq ||\mathcal{E}F||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}_N})} \leq c_2(\theta)||F||_{(B(\mathcal{I}_N),D(A_h))_{\frac{\theta}{2},\infty}}. \tag{26}$$

Per $F \in B(\mathcal{I}_N)$ abbiamo posto

$$||F||_{D(A_h)} = \max\{||F||_{B(\mathcal{I}_N)}, ||A_h F||_{B(\mathcal{I}_N)} \tag{27}$$

e $||F||_{(B(\mathcal{I}_N),D(A_h))_{\frac{\theta}{2},\infty}}$ indica la norma nello spazio di interpolazione reale. Naturalmente, per h fissato, queste due norme sono equivalenti alla norma $||.||_{B(\mathcal{I}_N)}$ e (26) stabilisce l'equivalenza uniforme tra due classi di norme.
Veniamo ora al risultato principale relativo allo schema di Eulero implicito: nella versione che dó é un caso particolare di 4.3 in [2]:

Teorema 3. *Sia B_h un operatore lineare in $B(\mathcal{I}_N)$ soddisfacente le seguenti condizioni, per certi $R > 0, \phi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, M > 0, \theta \in]0, 2[- \{1\}$:*
(a) $\{\lambda \in \mathbf{C} || \lambda | \geq R, |Arg(\lambda)| \leq \phi_0\} \subseteq \rho(B_h)$ e, per λ in questo insieme,

$$||(\lambda - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(B(\mathcal{I}_N))} \leq M(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{28;}$$

(b) per ogni $F \in B(\mathcal{I}_N)$

$$||\mathcal{E}F||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}}_N)} \leq M||F||_{(X, D(B_h))_{\frac{\theta}{2}, \infty}}; \tag{29}$$

(c) per ogni $G \in B(\overline{\mathcal{I}}_N), \lambda \in \mathbf{C}$ con $|\lambda| \geq R$ e $|Arg(\lambda)| \leq \phi_0$

$$(1 + |\lambda|)||\mathcal{E}(\lambda - A)^{-1}\mathcal{R}G||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}}_N)} + ||\mathcal{E}(\lambda - A)^{-1}\mathcal{R}G||_{C_h^{2+\theta}(\overline{\mathcal{I}}_N)}$$

$$\leq M[||G||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}}_N)} + (1 + |\lambda|)^\theta \max\{|G_0|, |G_N|\}]. \tag{30}$$

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} = B_h U^n + RG^n, n = 1, ..., M, \\ U^0 = 0. \end{cases} \tag{31}$$

con $G \in B(\{0, 1, ..., M\}, B(\overline{\mathcal{I}}_N)$ tale che $G^0 = 0$
Allora, se $\tau R < 1$, (31) é univocamente risolubile; se $U \in B(\{0, 1, ..., N\}, B(\mathcal{I}_N))$ risolve (31), per $n = 0, 1, ..., M$

$$||\mathcal{E}U^n||_{C_h^{2+\theta}(\overline{\mathcal{I}}_N)} \leq c[\max_{0 \leq n \leq M} ||G^n||_{C_h^\theta(\overline{\mathcal{I}}_N)}$$

$$+ \max_{0 \leq n_1 < n_2 \leq N} ((n_2 - n_1)\tau)^{-\frac{\theta}{2}} |G_0^{n_2} - G_0^{n_1})| + \max_{0 \leq n_1 < n_2 \leq N} ((n_2 - n_1)\tau)^{-\frac{\theta}{2}} |G_N^{n_2} - G_N^{n_1})|], \tag{32}$$

ove c é una costante positiva dipendente soltanto da θ, R, ϕ_0, M, T e indipendente da τ, h e G.

Osserviamo che in base al lemma 1 gli operatori A_h verificano le condizioni del teorema 3 con costanti indipendenti da h. Vale perció la conclusione del teorema 3 se si scelgono $G^1, ..., G^M$ in maniera tale che il secondo membro della disuguaglianza in (32) resti limitato da una costante indipendente da τ e h. Se il dato f nel problema (1) soddisfa le ipotesi del teorema 2, é facile vedere che, se poniamo, fissati τ e h

$$G_j^n = f(n\tau, jh) \tag{33}$$

per $1 \leq n \leq M$ e $0 \leq j \leq N$, il secondo membro di (30) é minore o uguale di

$$c[\sup_{t \in [0,T]} ||f(t, .)||_{C^\theta([0,L])} + ||f(., 0)||_{C^{\frac{\theta}{2}}([0,T])} + ||f(., L)||_{C^{\frac{\theta}{2}}([0,T])}]. \tag{34}$$

Un altro operatore alle differenze su $B(\mathcal{I}_N)$ che soddisfa le condizioni del teorema 3 uniformemente rispetto al parametro h, purché si scelga il parametro p sufficientemente grande, é il seguente: per $U \in B(\mathcal{I}_N)$, $1 \leq j \leq N-1$, poniamo

$$C_{h,p}V_j = \begin{cases} -\frac{1}{12}\partial_h^2\tilde{U}_{j-2} + \frac{7}{6}\partial_h^2\tilde{U}_{j-1} - \frac{1}{12}\partial_h^2\tilde{U}_j \text{ se } 2 \leq j \leq n-2, \\ \partial_h^2\tilde{U}_0 - \frac{1}{12}[\partial_h^2\tilde{U}_p - 2\partial_h^2\tilde{U}_{p+1} + \partial_h^2\tilde{U}_{p+2}] \text{ se } j = 1, \\ \partial_h^2\tilde{U}_{n-2} - \frac{1}{12}[\partial_h^2\tilde{U}_{n-p-4} - 2\partial_h^2\tilde{U}_{n-p-3} + \partial_h^2\tilde{U}_{n-p-2}] \text{ se } j = n-1. \end{cases} \tag{35}$$

Tale operatore rappresenta una discretizzazione piú accurata della derivata seconda rispetto a x rispetto ad A_h, valendo per $u \in C^5([0,L])$,

$$u''(jh) = A_h u_j^n + 0(h^2), \tag{36}$$

$$u''(jh) = C_{h,p}u_j^n + 0(h^3). \tag{37}$$

Passiamo ora allo schema di Crank-Nicholson. Il risultato corrispondente al teorema 3 é il seguente teorema 4 (caso particolare di 5.4 in [2]):

Teorema 4. *Supponiamo che valgano tutte le ipotesi del teorema 3 e, in piú,*
d) $||\tau B_h||_{\mathcal{L}(B(\mathcal{I}_N))} \leq S$, *con* $S > 0$;
e) se $|\lambda| \geq 2S$

$$||\mathcal{E}(\lambda - \tau A)^{-1}RG||_{C_h^\varrho(\overline{\mathcal{I}}_N} \leq M[||G||_{C_h^\varrho(\overline{\mathcal{I}}_N} + \tau^{-\theta}\max\{G_0, G_N\}] \tag{38}$$

per ogni $G \in B(\overline{\mathcal{I}}_N)$.
Si consideri il problema

$$\begin{cases} \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}(B_h U^n + B_h U^{n-1}) + RG^n, n = 1, ..., M, \\ U^0 = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Allora, se $2\tau R < 1$, *(39) é univocamente risolubile e vale la conclusione del teorema 3.*

Qualche parola di commento su questo risultato: la condizione discriminante é d); essa impone nella pratica una relazione tra il passo spaziale e il passo temporale. Infatti, consideriamo, ad esempio, l'operatore A_h; si ha

$$||A_h||_{\mathcal{L}(B(\mathcal{I}_N))} = 4h^{-2}. \tag{40}$$

d) impone allora

$$\tau \leq \alpha h^2, \tag{41}$$

si puó verificare che il teorema 4 fornisce stime di stabilitá sia nel caso degli operatori A_h, sia nel caso degli operatori B_h, purché si scelga p sufficientemente grande. In questo caso il risultato é stato provato solo nel caso $\theta \in]0,1[$.
Veniamo ora al problema della convergenza delle soluzioni dei problemi alle differenze alla soluzione del problema differenziale; cominciamo con lo schema di Eulero implicito; solitamente si presuppone una certa regolaritá della soluzione.

Teorema 5. *Supponiamo che (1) ammetta una soluzione stretta u con $t \to u(t,.) \in C^{1+\beta}([0,T];C([0,L])) \cap B([0,T];C^{2+\theta}([0,L]))$, $t \to \frac{\partial u}{\partial t}(t,.) \in B([0,T];C^{\theta}([0,L]))$, con $\beta \in]0,1], \theta in]0,2[$; sia U la soluzione del sistema (29), con $B_h = A_h$ e $G_j^n = f(n\tau, jh)$; allora, per ogni $\xi \in [0,\theta], \epsilon > 0$ esiste $c > 0$ dipendente solo da u, ξ, ϵ tale che, per $n = 1, ..., M$*

$$||u^n - \mathcal{E}U^n||_{C_h^{2+\xi}(\overline{\mathcal{I}}_N)} \leq c(\tau^{\beta} + h^{\theta})^{1-\frac{\xi}{\theta}-\epsilon}, \tag{42}$$

$$||\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} - \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau}||_{C_h^{\xi}(\mathcal{I}_N)} \leq c(\tau^{\beta} + h^{\theta})^{1-\frac{\xi}{\theta}-\epsilon}. \tag{43}$$

Stime dello stesso genere (vedi [2], 6) valgono per lo schema di Crank-Nicolson, ponendo in tal caso $B_h = C_{h,p}$, con $p \geq p_0$, prendendo $\tau \leq \alpha h^2$ per qualche $\alpha > 0$. In questo caso, tenendo conto di (11), é conveniente porre $F_j^n = f((n-\frac{1}{2})\tau, jh)$. Se la soluzione di (1) é sufficientemente regolare, per certi valori di ξ (vedi il teorema 5) le soluzioni dei problemi discretizzati convergono piú rapidamente alla soluzione di (1).

Concludiamo osservando che risultati dello stesso genere si possono ottenere per problemi misti di Cauchy-Dirichlet arbitrari in dimensione uno e anche per certi problemi in dimensione superiore (vedi [2]).

Bibliografia

[1] A. Ashyraliev, P. E. Sobolevskii, "Well-posedness of parabolic difference equations", Operator Theory Advances and Applications, vol. 69, Birkäuser (1994).

[2] D. Guidetti, S. Piskarev, "On maximal regularity of difference schemes for parabolic equations in $C^{\theta}(\overline{\Omega})$ spaces", Dip. Mat. Univ. Bologna, n. 8 (1997).

[3] V. Thomée, "Finite difference methods for linear parabolic equations", Handbook of Numerical Analysis, vol. I, 5-189 (1990).

[4] M. Crouzeix, S. Larsson, S. Piskarev, V. Thomée, "The stability of rational approximations of analytic semigroups", BIT, vol. 33(1), 74-84 (1993).

[5] C. Palencia, "A stability result for sectorial operators in Banach spaces", SIAM J. Numer. Anal. vol. 30, n. 5, 1373-1384 (1993).